

**Министерство сельского хозяйства РФ  
федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Вологодская государственная молочнохозяйственная академия  
имени Н.В. Верещагина»**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО  
Научно-исследовательской работе**

---

**Направление подготовки:  
35.04.06 Агроинженерия**

**Образовательная программа:  
Искусственный интеллект**

**Форма обучения:  
очная**

# 1 ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

## 1.1 Точность и погрешности приборов и измерений

Измерение – это сравнение измеряемой величины с эталоном, который принят за единицу. Различают измерения: *прямые* (непосредственное соотнесения с эталоном) и *косвенные* (определяются на основе вычисления прямых измерений).

Операции при измерении включают:

- установку прибора (в техническом паспорте);
- наблюдение и отсчет;
- вычисления;
- оценку погрешности.

При измерении получается приблизительное значение, что связано с ошибкой прибора (точность прибора) и природой самих измерений.

**Точность прибора** связана с физическими явлениями, которые лежат в основе метода измерений. Точность задается классом точности прибора, которая, как правило, указывается в паспорте к нему.

**Приборная погрешность**,  $\Delta_{\text{приб}}$  – это величина, обратная точности и обычно составляет  $\pm 0,5$  наименьшей цены деления прибора.

**Точность измерений** – это величина, обратная погрешности измерений  $\Delta_{\text{изм}}$ , которая зависит от количества повторностей и условий проведения опытов. Обычно соотношение между погрешностями составляет:  $\Delta_{\text{приб}} < \Delta_{\text{изм}}$ .

Хороший уровень измерений характеризуется соотношением:  $\Delta_{\text{изм}}/\Delta_{\text{приб}} \approx 1$ . Соотношение  $\Delta_{\text{приб}} > \Delta_{\text{изм}}$  встречается крайне редко и характеризует очень хороший уровень измерений.

### Виды погрешностей измерений

Различают: грубые, систематические и случайные погрешности измерений (ошибки).

*Грубые погрешности* (промахи) имеют место при нарушении основных условий измерений или при недосмотре и невнимательности исследователя. Промах фиксируется тогда, когда один из результатов сильно отличается от других. Следовательно, нужно результат отбросить, опыт повторить и лучше другим исследованием.

*Систематические погрешности* проявляются при многократном повторении измерений. Различают: поправки – ошибки известной природы и известной величины, ошибки известной природы, но неизвестной величины, ошибки неизвестной природы.

Систематические ошибки связаны:

- с неправильным выбором методики;
- с ограниченной точностью прибора;
- с неправильной установкой и настройкой прибора;

- с нарушением условий измерения.

*Случайные погрешности* – не одинаковы по каждому измерению и не могут быть учтены в отдельности. Они связаны с суммированием эффектов многих факторов, таких как:

- погодные условия (температура, давление);
- сотрясение и вибрации приборов (для весов);
- субъективные особенности исследователя;
- время суток измерения (утром или вечером).

Грубые и систематические ошибки следует устранять или уменьшать, а случайные необходимо оценивать.

### **Понятие случайного события**

Исследователь ставит задачу установить причинно-следственную связь между отдельными явлениями – факторами и явлениями – следствиями (откликом). Явления, которые рассматриваются с точки зрения их осуществимости, называются событиями.

Различают события:

- достоверные, которые произойдут обязательно при заданном комплексе факторов;
- невозможные, которые не произойдут при заданном комплексе факторов;
- случайные, которые могут быть и могут не состояться при заданном комплексе факторов.

Различают случайные события: *дискретные*, которые принимают конечное или бесконечное множество значений (например, количество автобусов, прибывших на остановку) и *непрерывные*, которые принимают бесконечное множество значений в пределах заданного интервала (например, количество поступающего молока на завод).

Для количественной оценки характеристики распределения случайной величины служат:

- функция распределения или интегральный закон распределения;
- плотность распределения (только для непрерывных событий).

### **Оценка случайных погрешностей измерений.**

#### **Основы теории**

В основе теории лежит предположение о том, что:

- при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто;
- большие погрешности встречаются реже, чем малые.

*Истинная* абсолютная погрешность *единичного* измерения определяются как:

$$\Delta \textcolor{brown}{a}_i^* = a - a_i, \quad (1.1)$$

где  $a$  – истинная величина;

$a_i$  – измеренная величина.

Можно доказать, что при большом числе измерений ( $n \rightarrow \infty$ ) истинное значение  $a = \bar{a}$  ( $\bar{a}$  – среднее значение) и тогда абсолютная погрешность составит:

$$\Delta a_i = \bar{a} - a. \quad (1.2)$$

Например, произведем  $n$  измерений. Обозначим результаты отдельных измерений через:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Величины отдельных измерений выразим через истинную абсолютную погрешность единичного измерения согласно (1.1):

$$a_1 = a - \Delta a_1^*;$$

$$a_2 = a - \Delta a_2^*;$$

.....

$$a_n = a - \Delta a_n^*.$$

После суммирования правых и левых членов уравнений получим:

$$\sum_{i=1}^n a_i = n \cdot a - \sum_{i=1}^n \Delta a_i^*. \quad (1.3)$$

Разделим правую и левую части уравнения (1.3) на  $n$  и выразим  $a$ :

$$a = \frac{\sum a_i + \sum \Delta a_i^*}{n} = \frac{1}{n} \sum a_i + \frac{1}{n} \sum \Delta a_i^* = \bar{a} + \frac{1}{n} \sum \Delta a_i^*.$$

При  $n \rightarrow \infty$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum \Delta a_i^* = 0$  и тогда  $a = \bar{a}$ .

При ограниченном числе измерений при  $n < 30$  между истинной величиной и средним значением возможна лишь приближенная связь  $a \approx \bar{a}$ .

В этом случае необходимо оценивать величину этого расхождения, т.е. оценить вероятность попадания измеряемой величины  $a_i$  в интервал  $[a_i \pm 1/2d(a_i)]$ , где  $d(a_i)$  – бесконечно малая величина.

Вероятность распределения случайных величин чаще всего подчиняется нормальному распределению Гаусса, согласно которому вероятность появления  $y(a_i)$  зависит от самой величины  $a_i$ :

$$y(a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(a-a_i)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.4)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия.

Графически закономерность (1.4) представлена на рис. 1.1.

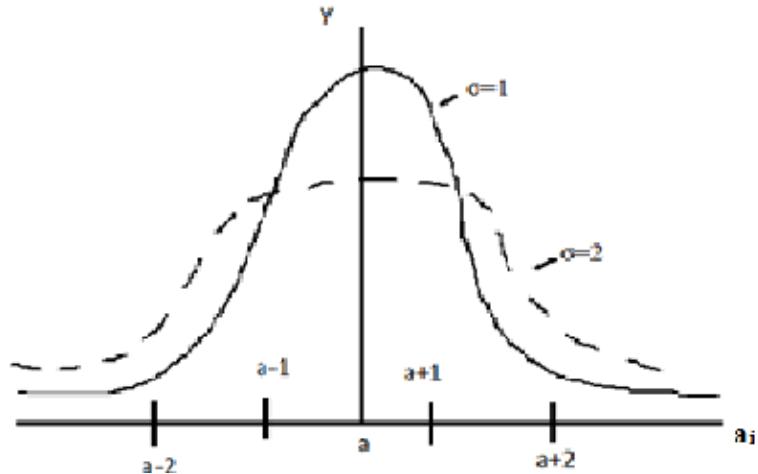


Рис. 1.1. Вероятность распределения случайных величин  $a_i$  согласно нормальному распределению Гаусса

Вероятность распределения случайных величин зависит от дисперсии  $\sigma^2$ ; а также от *генерального среднего* (это значение, относительно которого происходит разброс случайных величин). В нашем случае генеральное среднее – это истинное значение  $a$ .  $\sigma$  – характеризует быстроту изменения вероятности. Аналогичное распределение имеет погрешность  $\Delta a_i^*$ :

$$y(\Delta a_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\Delta a_i^*)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.5)$$

Графически закономерность (1.5) представлена на рис. 1.2.

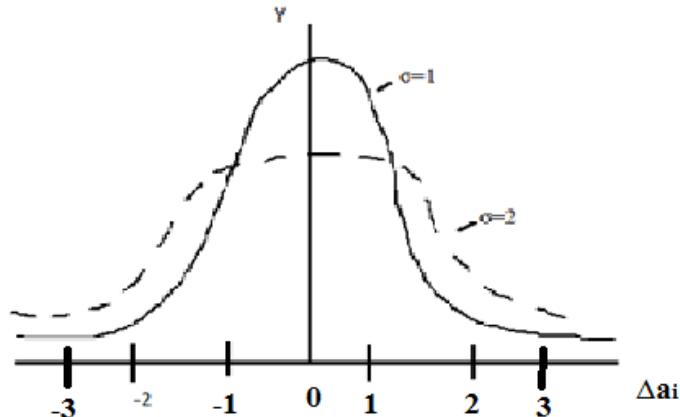
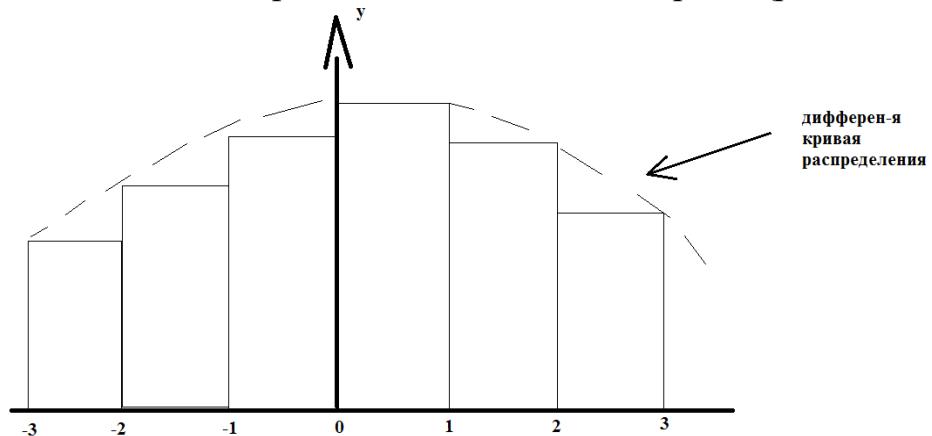


Рис. 1.2. Вероятность распределения случайных величин  $\Delta a_i^*$  согласно нормальному распределению Гаусса

Вероятность (плотность) появления погрешности  $y(\Delta a_i^*)$  зависит от самой погрешности  $\Delta a_i^*$  и характеризует частоту появления  $\Delta a_i^*$  в интервале  $[\Delta a_i^* \pm 1/2d(\Delta a_i^*)]$ , где  $d(\Delta a_i^*)$  – бесконечно малая величина. Генеральное среднее – это значение, относительно которого происходит разброс случайных величин. В нашем случае генеральное среднее равно нулю. Генеральная совокупность – это все возможности значения величин  $a_i$  и  $\Delta a_i^*$ . На практике

обычно задается величина интервала  $d(\Delta a_i^*)$  и тогда частота попадания  $\Delta a_i^*$  в этот интервал может быть представлена в виде гистограмм (рис. 1.3).

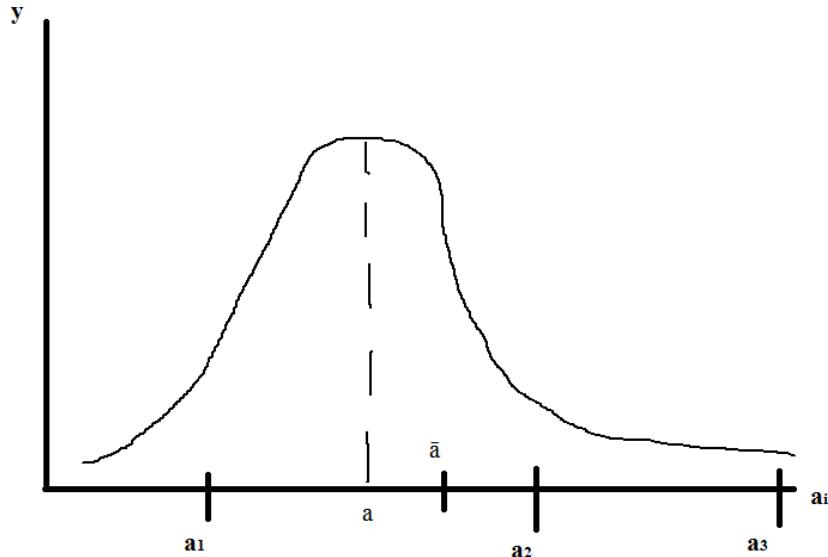


Р и с. 1.3. Гистограмма

### Погрешность серии измерений

Обозначим через  $\tilde{a}$  погрешность серии измерений и установим связь между истинным  $a$  и средним  $\bar{a}$  значениями измеряемой величины.

На рис. 1.4 приведены положения  $a$  и  $\bar{a}$  относительно некоторых измеренных значений  $a_1, a_2$  и  $a_3$ .



Р и с. 1.4. Вероятность распределения случайных величин  $a_i$

Из рис. 1.4 следует, что даже при фиксированных значениях  $a_1$  и  $a_2$  различные значения  $a_3$  приводят к различному расположению  $\bar{a}$  относительно истинного значения  $a$ . Вероятность появления величины  $\bar{a}$  различна, но с возрастанием  $| \bar{a} - a |$  она уменьшается.

Поскольку результаты отдельных измерений носят случайный характер, то и отклонение (абсолютная погрешность результатов серии измерений)  $\Delta \tilde{a} = a - \bar{a}$  тоже носит случайный характер, так как оно зависит от вероятности появления того или иного значения  $\bar{a}$ .

При малом количестве измерений  $n$  величина отдельного измерения, например  $a_3$ , сильно влияет на  $\bar{a}$ . Однако при  $n \rightarrow \infty$  влияние отдельного измерения на  $\bar{a}$  слабеет, и тогда в целом отклонение величины  $\Delta\bar{a}$  можно рассматривать как случайную величину, составленную из малых влияний величин отдельных измерений.

Тогда распределение этой случайной величины  $\Delta\bar{a}$  также подчиняется закону нормального распределения с иным значением дисперсии  $\sigma_{\bar{a}}^2$ :

$$y(\Delta\bar{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\bar{a}}} \cdot e^{-\frac{-(\Delta\bar{a})^2}{2\sigma_{\bar{a}}^2}} \quad (1.6)$$

где  $\sigma_{\bar{a}}^2$  – дисперсия серии измерений.

Вместо приближенного равенства  $a \approx \bar{a}$  можно записать  $a = \bar{a} \pm \Delta a$ ,  $\Delta a$  – абсолютная погрешность серии измерений.

Следует различать  $\Delta\bar{a}$  – случайную величину (возможное значение  $\Delta\bar{a}$ ) и  $\Delta a$  – частное значение этой величины.

Назовем *доверительным интервалом* интервал:  $\underline{\bar{a} - \Delta a} ; \underline{\bar{a} + \Delta a}$ .

В этот интервал попадает истинное значение с заданной вероятностью:

$$\underline{\bar{a} - \Delta a} < a < \underline{\bar{a} + \Delta a} .$$

*Надежность* результата серии измерений  $\alpha$  – это вероятность того, что истинное значение  $a$  попадает в заданный доверительный интервал. Эта величина выражается в долях единицы или в процентах. Чем больше  $\alpha$ , тем с большей надежностью искомая величина попадает в этот интервал. Обычно  $\alpha=0,95$ .  $\alpha$  зависит от числа измерений  $n$  и задаваемой погрешности  $\Delta a$ .

### Оценка погрешности серии измерений

Величина  $\Delta a$  при  $n \rightarrow \infty$  может быть представлена в виде уравнения:

$$\Delta a = K_\alpha \cdot \sigma_{\bar{a}}, \quad (1.7)$$

где  $K_\alpha$  – это коэффициент, зависящий от надежности  $\alpha$ .

При  $n \rightarrow \infty$  величина дисперсии  $\sigma^2$ , входящая в уравнение (1.5), равна среднему квадрату погрешности отдельных измерений  $\sigma^2 = \Delta S_n^{*2}$ :

$$\Delta S_n^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i^*)^2}{n}. \quad (1.8)$$

При ограниченном числе опытов  $n$  она лишь приближается к  $\sigma^2$ .

Поскольку истинное значение  $a$  не известно, то  $\Delta a_i^*$  не может быть вычислено и вместо  $\Delta a_i^*$  находят «измеряемые» абсолютные погрешности  $\Delta a_i$ , равные:

$$\Delta a_i = \bar{a} - a_i.$$

Все множество возможных значений  $\Delta a_i$  также подчиняется закону нормального распределения:

$$y(\Delta a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\Delta a_i)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.9)$$

Значение дисперсии  $\sigma^2$  в этом законе совпадает со значением дисперсии в законе (1.5). В случае конечного значения  $n$  число независимых значений (степеней свободы) с учетом того, что среднее  $\bar{a}$  само зависит от  $n$ , становится равным  $f=(n-1)$ .

Сумма погрешностей подчиняется очевидному тождеству:

$$\sum_{i=1}^n \Delta a_i = 0. \quad (1.10)$$

Докажем это:

$$\Delta a_1 = \bar{a} - a_1;$$

$$\Delta a_2 = \bar{a} - a_2;$$

$$\dots$$

$$\Delta a_n = \bar{a} - a_n$$

Суммируем правые и левые части этих равенств, получим:

$$\sum_{i=1}^n \Delta a_i = n \cdot \bar{a} - \sum_{i=1}^n a_i.$$

С учетом определения среднеарифметического:

$$\sum_{i=1}^n \Delta a_i = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

В силу того, что истинное значение  $a$  неизвестно, оценкой дисперсии  $\sigma^2$  становится *выборочная дисперсия* или *дисперсия выборки*:

$$\Delta S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i)^2}{n-1}. \quad (1.11)$$

Среднеквадратичная погрешность отдельного измерения составит:

$$\Delta S_n = \sqrt{\frac{\sum (\Delta a_i)^2}{n-1}}. \quad (1.12)$$

При ограниченном числе измерений  $n$  величина  $\Delta S_n^2$  является лишь оценкой дисперсии  $\sigma^2$ , а не равна ей.

Покажем, как найти оценку погрешности результата всей серии из  $n$  измерений:  $\Delta \tilde{a} = a - \bar{a}$  с заданным значением  $a$ .

*Оценка погрешности для серии измерений при заданном  $a$ .*

Установим связь между  $\sigma^2$  и  $\Delta \tilde{a}^2$ , т.е. дисперсии распределений погрешностей результата отдельных измерений и серии измерений.

Для этого преобразуем (1.8) с учетом тождества (1.10):

$$\begin{aligned} \Delta S_n^{*2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i^*)^2}{n} = \frac{\sum (a - a_i)^2}{n} = \frac{\sum (a - \bar{a} + \bar{a} - a_i)^2}{n} = \frac{\sum (\Delta \tilde{a} + \Delta a_i)^2}{n} = \frac{\sum (\Delta \tilde{a}^2 + 2\Delta \tilde{a} \Delta a_i + \Delta a_i^2)}{n} = \\ &= \frac{\sum \Delta \tilde{a}^2 + 2\Delta \tilde{a} \sum \Delta a_i + \sum (\Delta a_i)^2}{n} = \Delta \tilde{a}^2 + \frac{1}{n} \sum (\Delta a_i)^2 \frac{n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\Delta S_n^{*2} = \Delta \tilde{a}^2 + \frac{\Delta S_n^2 \cdot (n-1)}{n}, \quad (1.13)$$

где  $n$  – номер опыта в серии.

Например, в  $N$  сериях опытов по  $n$  измерений в каждом получили средние значения величин:  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  и погрешности соответственно:  $(\Delta a_1), (\Delta a_2), \dots, (\Delta a_n)$ .

Сравнивая выражения (1.6) и (1.5), можно записать, что  $\Delta S_{\bar{a}}^2$  для серии измерений:

$$\Delta S_{\bar{a}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n (\Delta a_j)^2 = (\Delta \bar{a})^2. \quad (1.14)$$

Черта сверху означает усреднение по всем  $N$  сериям.

Из уравнения (1.13) с учетом (1.14) определим:

$$(\Delta \bar{a})^2 = \Delta S_{\bar{a}}^2 = \Delta S_n^{*2} - \frac{\Delta S_n^{*2} \cdot (n-1)}{n}. \quad (1.15)$$

Как известно, при большом числе измерений при  $n \rightarrow \infty$  для единичного измерения:  $\Delta S_n^2 \rightarrow \sigma^2$  и  $\Delta S_n^{*2} \rightarrow \sigma^2$ . При большом числе  $N$  серий величина  $\Delta S_{\bar{a}}^2 \rightarrow \sigma_{\bar{a}}^2$ . Отсюда из (1.15):

$$\sigma_{\bar{a}}^2 = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (1.16)$$

Это уравнение означает, что дисперсия серии измерений в  $n$  раз меньше дисперсии отдельных измерений.

При ограниченном числе  $n$  измерений приближенным выражением  $\sigma_{\bar{a}}^2$  будет  $\Delta S_{\bar{a}}^2$ :

$$\Delta S_{\bar{a}}^2 = \frac{\Delta S_n^2}{n} = \frac{\sum (\Delta a_i)^2}{(n-1)n}. \quad (1.17)$$

### Определение границы доверительного интервала с помощью критерия Стьюдента

*Доверительный интервал* – это интервал, в который истинное значение  $a$  попадает с заданной надежностью  $\alpha$ :

$$[a - \Delta a; a + \Delta a]$$

Оценка погрешности  $\Delta a$  для  $n$  измерений при  $n \rightarrow \infty$  определяется по уравнению (1.11):

$$\Delta a = K_\alpha \cdot \sigma_{\bar{a}}.$$

$$\text{Откуда: } K_\alpha = \frac{\Delta a}{\sigma_{\bar{a}}}.$$

При малых значениях ( $n < 20$ )  $K_\alpha$  нельзя использовать, так как неизвестна величина дисперсии  $\sigma_{\bar{a}}$ , поэтому введем новый коэффициент  $t_\alpha$  – коэффициент Стьюдента.

Рассмотрим некоторую случайную величину  $t$ , равную отношению случайных величин:

$$t = \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta S_{\bar{a}}} = \frac{a - \bar{a}}{\Delta S_{\bar{a}}}, \quad (1.18)$$

где  $\Delta S_{\bar{a}}$  – среднеквадратичная зависимость, которая рассчитывается из (1.17);

$\Delta \tilde{a} = a - \bar{a}$  – погрешность серии измерений.

Обозначим вероятность появления величины  $t$  в интервале  $(t-1/2dt; t+1/2dt)$  через  $f(t)$ : 
$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \sqrt{n-1} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}}, \quad (1.19)$$

где  $\Gamma(x)$  обобщенная функция.

Кривые распределения Стьюдента  $t$  имеют вид, представленный на рис. 1.5.

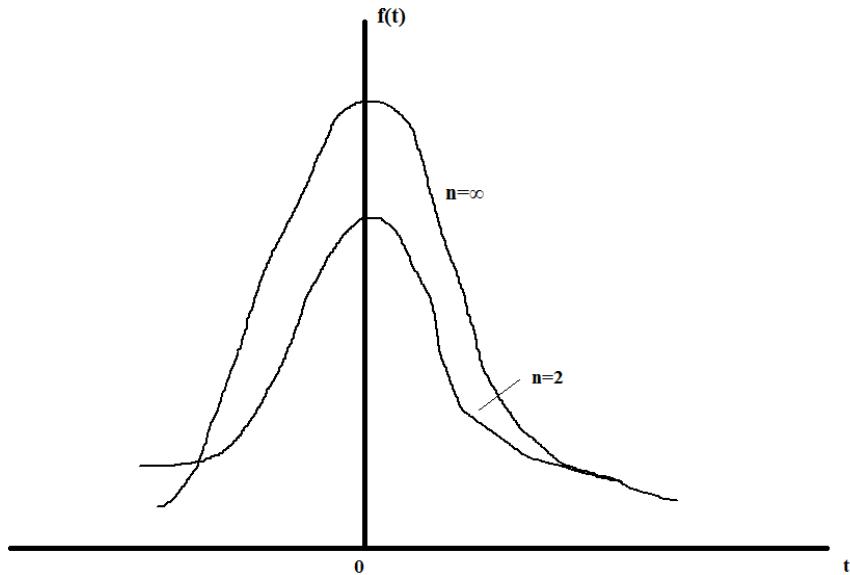


Рис. 1.5. Кривые распределения Стьюдента

При  $n > 20$  распределение приближается к нормальному.

Распределение Стьюдента позволяет оценивать величину надежности  $\alpha$  при заданной погрешности  $\Delta a$  или наоборот определять  $\Delta a$  при заданном  $\alpha$ .

При  $n < 20$  при расчете  $\Delta a$  при заданном  $\alpha$  необходимо знать  $t_\alpha$  – коэффициент Стьюдента, который зависит от числа измерений  $n$  и надежности  $\alpha$ :

$$t_\alpha(n) = \Delta a / \Delta S_{\bar{a}},$$

где  $\Delta S_{\bar{a}}$  определяется из соотношения (1.17).

Значения коэффициента Стьюдента приводятся в таблице в зависимости от числа измерений  $n$  и надежности  $\alpha$ . Тогда, рассчитав по формуле (1.17)  $\Delta S_{\bar{a}}$  и определив по таблице Приложения 1  $t_\alpha(n)$  при заданных  $n$  и надежности  $\alpha$ , найдем погрешность:  $\Delta a = t_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{a}}$ .

*Пример 1.* Рассчитать погрешность серии измерений.

Таблица 1.1 – Исходные данные и данные расчета

№ опыта	$ai$	$\Delta ai$	$(\Delta a_i)2$
1	14,81	0,009	$81 \times 10^{-6}$
2	14,79	0,029	$84 \times 10^{-6}$
3	14,81	0,009	$81 \times 10^{-6}$
4	14,80	0,019	$36 \times 10^{-6}$
5	14,85	-0,031	$96 \times 10^{-6}$
6	14,84	-0,021	$44 \times 10^{-6}$
7	14,80	0,019	$36 \times 10^{-6}$

Рассчитываем:

среднее значение:  $\bar{a}=14,819$ ;

сумму квадратов отклонений:  $\sum 4890 * 10^{-6}$ .

Среднеквадратичная погрешность отдельного измерения составит:

$$\Delta S_n = \sqrt{\frac{\sum (\Delta a_i)^2}{n-1}}; \quad \Delta S_n = 0,0233;$$

Среднеквадратичная погрешность серии измерений составит:

$$\Delta S_{\bar{a}} = \frac{\Delta S_n}{\sqrt{n}}; \quad \Delta S_{\bar{a}} = \frac{0,0233}{\sqrt{10}} \approx 0,00737.$$

При  $\alpha=0,95$  и  $n=10$  найдем по таблице приложения 1  $t_\alpha=2,26$ .

Тогда погрешность измерений составит:

$$\Delta a = t_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{a}} = 0,00737 \cdot 2,26 \approx 0,017 \quad \text{или} \quad a = 14,819 \pm 0,017.$$

Относительная погрешность равна:

$$\varepsilon = \frac{0,017}{14,819} \cdot 100 \approx 0,115\% \quad \varepsilon = \pm 0,115\% \quad \frac{1}{\varepsilon} \approx 8,7 - \text{точность измерений.}$$

### Пример 2.

Задано  $\Delta a=0,06$ . Найти необходимое число опытов  $n$ .

1. Предварительно проведем небольшое число опытов, например,  $n=5$  и вычислим:

$$\Delta S_n = \sqrt{\frac{\sum (\Delta a_i)^2}{n-1}} \quad \text{и затем найдем} \quad \Delta S_{\bar{a}} = 0,03.$$

2. При заданном  $\alpha=0,95$  по таблице приложения 1 определим критерий Стьюдента при разных значениях  $n$  определим  $\Delta a = \Delta S_{\bar{a}} \cdot t_\alpha$  и занесем в таблицу:

$n$	$t_\alpha$	$(\Delta a)$
8	2,37	0,0711
9	2,31	0,0693
10	2,26	0,0679
11	2,23	0,0669
12	2,2	0,066
13	2,18	0,0654

14	2,16	0,0648
.....	.....	.....
20	2,09	0,0627
.....	.....	.....
30	2	0,06

*Вывод:* необходимо выполнить не менее 30 опытов, чтобы достигнуть заданного значения  $\Delta a=0,06$ .

## 1.2 Статистические гипотезы

Из принципа практической достоверности, изложенного в предыдущем разделе, вытекает принцип практической невозможности: *события с очень малыми вероятностями можно считать практически невозможными*.

Принцип практической невозможности может быть использован в задачах, где возникает необходимость проверить, случайно или неслучайно появилось то или иное событие. При этом всякий раз практическая невозможность события полностью отвергает случайность его появления. Чем меньше вероятность осуществившегося события, тем больше его «неслучайность» и тем важнее эту «неслучайность» раскрыть. Событие для исследователя становится значимым.

Использование принципа практической невозможности для доказательства неслучайного появления события с малой вероятностью называется *принципом значимости*. Наибольшее значение вероятности, несовместимой со случайностью события, называется *уровнем значимости*. То есть уровень значимости есть максимум таких вероятностей, при которых события можно считать практически невозможными. Но событие, противоположное практически невозможному, является практически достоверным. Поэтому *уровень значимости и уровень достоверности должны дать в сумме единицу*. Чаще всего принцип значимости применяется для проверки статистических гипотез.

Заключение о генеральной совокупности результатов выборки по своей природе является вероятностным и обычно формулируется в виде статистических гипотез. Различают статистические гипотезы о законах и параметрах распределения.

### Общая схема выдвижения гипотез

Рассмотрим общую схему выдвижения гипотез на примере гипотез о параметрах распределения. Имеем 2 выборки, в каждой по  $n_1$  и  $n_2$  измерений. Для каждой выборки найдено выборочное значение параметра  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Причины расхождения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  неизвестны.

Гипотеза: различие между  $\theta_1$  и  $\theta_2$  случайные и выборки  $n_1$  и  $n_2$  принадлежат одной генеральной совокупности. Тогда можно предположить, что  $\theta_1=\theta_2$ . Выдвинутая гипотеза называется *нулевой гипотезой*. Обозначим ее через  $H_0$ .

Для проверки этой гипотезы необходимо выяснить, значимо ли расхождение между  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Для этого исследуют случайную величину  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$  и проверяют значимо ли ее отклонение от нуля. Статистика, с помощью которой проводят эту проверку, называется критерием проверки гипотез.

Все возможные значения подобных статистик составляют 2 области:

1. Область принятия 0-й гипотезы;
2. Критическая область.

Тогда проверка гипотезы сводится к выяснению, в какую область попадают значения данной статистики, если в критическую, гипотеза отвергается, если не попадает, гипотеза принимается как не противоречащая результатам эксперимента.

Поскольку результаты основываются на статистиках, полученных в результате выборочных испытаний, то при их принятии могут быть допущены два рода ошибок:

1. Гипотеза отклоняется, когда она верна (ошибка первого рода);
2. Гипотеза принимается, когда она не верна (ошибка второго рода).

Вероятность сделать ошибку 1-го рода называется уровнем значимости критерия  $q$ . Значение статистики является значимым, если ее вероятность меньше, чем принятый уровень значимости. Обычно на практике  $q=0,05$  (5% – уровень значимости). Доверительная вероятность  $\alpha=0,95$  ( $\alpha = 1 - q$ ).

Вероятность совершить ошибку 2-го рода связана с принятием *мощности критерия* — *вероятности отклонить неверную гипотезу* —  $(1-\beta)$ .

Уровень значимости  $q$  тесно связан с мощностью критерия  $(1-\beta)$ . При любом заданном объеме выборки вероятность совершить ошибку 1-го рода можно снизить за счет снижения  $q$ , однако при этом возрастает вероятность  $\beta$  допустить ошибку 2-го рода, при этом снижается мощность критерия  $1-\beta$ . Ситуация противоречива, и для выхода из нее необходимо повысить объем выборки.

Вид критической области зависит от заданного  $q$  и от характера альтернативной гипотезы  $H_a$ , т.е. гипотезы, конкурирующей с нулевой  $H_0$ . Пример: нулевая гипотеза  $H_0$  предполагает, что  $\theta_1 = \theta_2$ , а альтернативная —  $H_a$  предполагает, что  $\theta_1 \neq \theta_2$ , т.е.  $\theta_1 > \theta_2$  или  $\theta_1 < \theta_2$ .

## Критерии проверки статистических гипотез

Гипотеза о предполагаемом законе распределения проверяется с помощью критериев *согласия*. Гипотеза о параметрах распределения проверяется с помощью критериев *значимости*.

### 1. Критерии согласия

Ситуация: функциональная форма закона распределения неизвестна или закон нормального распределения вызывает сомнения. Проверка данной гипотезы осуществляется с помощью критерия *согласия Пирсона*  $\chi^2$ .

Нулевая гипотеза предполагает, что результаты выборочных измерений теоретически подчиняются закону нормального распределения.

Проверка гипотезы. Для этого результаты измерений большой выборки группируются по интервалам так, чтобы в каждом было не менее 5 измерений. Для каждого интервала подсчитывают число измерений  $m_i$ , и вычисляют критерий *согласия Пирсона*:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - \alpha z)^2}{\alpha z}, \quad (1.20)$$

где  $z$  – количество интервалов;

$\alpha$  – вероятность,  $\alpha = 1 - q$ .

Задавшись уровнем значимости  $q$ , а также определив число степеней свободы  $f = z - 3$ , находим табличное значение критерия Пирсона  $\chi^2_{\text{табл}}$ .

Если соотношение между табличным и расчетными значениями составляет  $\chi^2_{\text{табл}} \geq \chi^2_{\text{расч}}$ , гипотеза подтверждается. Результаты выборочных измерений теоретически подчиняются закону нормального распределения.

*Пример 1.*

$n=100$ ,  $z=10$ ,  $m_i=10$ ,  $q=0,04$ ,  $\alpha=1-q=0,96$ :

$$\chi^2_{\text{расч}} = \frac{(10 - 0,96 \cdot 10)^2}{0,96 \cdot 10} = 0,0177; \quad f=10-3=7; \quad \chi^2_{\text{табл}}=14,067 \text{ (приложение 5).}$$

*Вывод:*  $\chi^2_{\text{расч}} < \chi^2_{\text{табл}}$ , условие выполняется, следовательно, функция подчиняется закону нормального распределения. Кроме критерия Пирсона, для проверки нулевой гипотезы могут использоваться критерии Колмогорова, Смирнова и др.

## 2. Критерии значимости

### 2.1 Критерии сравнения дисперсий

Поскольку дисперсия характеризует величину рассеивания параметров, т.е. точность параметров технологических процессов, точность машин и приборов, то, следовательно, сравнение выборочных дисперсий является одной из важных задач статистической обработки результатов.

Например, проведено  $N$  серий измерений (обычно 2–5), в каждой по  $n$  измерений (3–5). Полученные результаты характеризуются различными дисперсиями.

Вопрос: можно ли сравниваемые выборочные дисперсии отнести к одной и той же генеральной совокупности и считать расхождения между ними случайными в пределах заданной доверительной вероятности.

Нулевая гипотеза  $H_0$  предполагает равенство дисперсий и относит все результаты к одной и той же генеральной совокупности. Для проверки этой гипотезы служит *критерий Фишера*:

$$F_{\text{расч}} = \frac{\Delta S_n^2 \text{ макс}}{\Delta S_n^2 \text{ мин}}. \quad (1.21)$$

При выбранном уровне значимости  $q$  и степенях свободы  $f_1=n_1-1$ ;  $f_2=n_2-1$  определяем табличное значение *критерия Фишера* и сравниваем с

расчетным. Если  $F_{\text{расч}} \leq F_{\text{табл}}$ , то гипотеза принимается и выборочные результаты принадлежат одной генеральной совокупности. Наилучшие результаты этот критерий оценки дает при малых выборках.

Если количество сравниваемых дисперсий больше 2 и во всех выборках одинаковое число результатов, то дисперсии сравниваются с помощью критерия Кохрана:

$$G_{\text{расч}} = \frac{\Delta S_n^2 \max}{\sum_1^N \Delta S_n^2}. \quad (1.22)$$

При выбранном уровне значимости  $q$  и степени свободы  $f=n-1$  определяем табличное значение критерия Кохрана и сравниваем с расчетным.

Если  $G_{\text{расч}} \leq G_{\text{табл}}$ , следовательно, расхождение между дисперсиями незначимо.

*Пример 2:* Дано:  $N=4$  выборки объемом по  $n=17$  измерений,  $q=0,05$ . Необходимо проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий.

N	1	2	3	4
$\Delta S_n^2$	0,21	0,25	0,34	0,40

Рассчитаем критерий Кохрана:

$$G_{\text{расч}} = \frac{0,4}{1,2} = 0,33; f = 17 - 1 = 16; G_{\text{табл}} = 0,44 \text{ (прилож. 4).}$$

Соотношение:  $G_{\text{расч}} \leq G_{\text{табл}}$ .

Условие выполняется, следовательно, расхождение между дисперсиями незначимо.

*Пример 3.* По данным примера 2 проверку проводим по критерию Фишера:

$$F_{\text{расч}} = \frac{0,4}{0,21} = 1,9; f_1 = f_2 = n - 1 = 17 - 1 = 16; F_{\text{табл.}} = 2,33 \text{ (приложение 3).}$$

Получим соотношение  $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}$ . Условие выполняется, следовательно, расхождение между дисперсиями незначимо.

## 2.2 Критерий оценки равенства средних

Проверкой гипотезы о равенстве средних оценивают истинность значений результатов. Например, в результате определения параметров двух одинаковых материалов в одних и тех же условиях обнаружено различие в средних значениях, то возникает вопрос: является ли это различие случайным или проявились какие-то систематические ошибки.

Имеем две независимые выборки:  $n_1$  и  $n_2$  и среднее значение параметров для них  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  ( $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  – случайные величины). Предположим, что дисперсии для них равны  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , однако их числовое значение неизвестно.

Для этого воспользуемся распределением Стьюдента:

$$t = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\Delta S_1^2 + (n_2 - 1)\Delta S_2^2}{n_1 + n_2}}}. \quad (1.23)$$

При выбранном уровне значимости  $\alpha$  и степени свободы  $f=n_1+n_2-2$  определяем табличное значение  $t_{\text{табл}}$  и сравниваем с расчетным.

Если  $t_{\text{расч}} \leq t_{\text{табл}}$ , следовательно гипотеза о равенстве средних подтверждается, т.е. расхождение между  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  не является значимым.

*Пример 4.* Сравниваем 2 материала  $N_1$  и  $N_2$  на прочность. Прочность будем оценивать давлением. Было установлено, что для материала  $N_1$  давление составило  $\bar{x}_1=22$  МПа;  $n_1=180$ ;  $\Delta S_1^2=4,12$ . Для материала  $N_2$   $\bar{x}_2=24$  МПа;  $n_2=89$ ;  $\Delta S_2^2=4,37$  МПа.

Рассчитаем:

$$t = \frac{24 - 22}{\sqrt{(180-1) \cdot 4,12 + (89-1) \cdot 4,37}} \cdot \sqrt{\frac{180 \cdot 89(269-2)}{269}} = 7,48.$$

Определим  $t_{\text{табл}} = 2$  при  $\alpha=0,95$  и  $f=267$ . Получим соотношение  $t_{\text{расч}} > t_{\text{табл}}$ . Условие не выполняется, расхождение не является случайным, следовательно, прочность материала  $N_2$  выше.

### 2.3 Критерий проверки грубой ошибки

Грубые ошибки исключаются в результате проверки нулевой гипотезы  $H_0$  о том, что предполагаемая грубая ошибка принадлежит той же выборочной совокупности, что и остальные  $(n-1)$  результаты. Для проверки этой гипотезы можно использовать критерий Стьюдента:

$$t_{\text{расч}} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}}{\Delta S_n}.$$

При выбранном уровне значимости  $\alpha$  и степени свободы  $f=n-1$  определяем табличное значение  $t_{\text{табл}}$  и сравниваем с расчетным.

Если  $t_{\text{расч}} \leq t_{\text{табл}}$ , следовательно расхождение незначимо и  $x_i$  не является грубой ошибкой.

*Пример 5.* Измерим размеры частиц  $x_i$  (таблица)  $n=5$ . Следует выяснить, является ли  $x_5$  грубой ошибкой.

№ опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_i$ , мкм	2,0	2,5	2,8	2,9	3,6
$(x_i - \bar{x})$ , мкм	0,5776	0,0676	0,0016	0,0196	0,7056

$$\bar{x}_{\text{ср}} = 2,76 \text{ мкм.}$$

Рассчитаем среднеквадратичную погрешность отдельного измерения:

$$\Delta S_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,372}{4}} = 0,586.$$

Для проверки этой гипотезы используем критерий Стьюдента:

$$t_{\text{расч}} = \frac{3,6 - 2,76}{0,586} = 1,43.$$

При  $\alpha=0,95$  и степени свободы  $f=n-1=4$  определим  $t_{\text{табл}}=2,78$ .

Поскольку  $t_{\text{расч}} < t_{\text{табл}}$ , следовательно, расхождение незначимо и  $x_5$  не является грубой ошибкой.

## 2.4 Критерий проверки значимости коэффициентов корреляции

Чтобы выяснить находятся ли случайные величины в корреляционной зависимости, выборочный коэффициент корреляции  $R$  должен быть проверен на значимость. С этой целью проверяется нулевая гипотеза  $H_0$  об отсутствии корреляции  $R = 0$ . Распределение случайных величин предполагается нормальным.

Для оценки используется статистика:

$$t = R \sqrt{\frac{(n-2)}{(1-R^2)}}, \quad (1.24)$$

которая имеет распределение Стьюдента со степенями свободы  $f=n-2$ .

Если  $t_{\text{расч}} \leq t_{\text{табл}}$ , следовательно нулевая гипотеза  $H_0$  подтверждается, корреляционной связи нет.

*Пример 6.*  $n=7$ ,  $R=0,995$ .

Необходимо подтвердить или опровергнуть нулевую гипотезу  $H_0$ . Рассчитаем:

$$t_{\text{расч}} = 0,995 \cdot \sqrt{\frac{7-2}{(1-0,995^2)}} = 22,3.$$

При  $\alpha=0,95$  и степени свободы  $f=n-2=5$  определим  $t_{\text{табл.}}=2,45$ .

Поскольку  $t_{\text{расч}} > t_{\text{табл}}$ , следовательно нулевая гипотеза  $H_0$  не подтверждается, корреляционная связь есть, т.е. случайные величины зависимы.

## 2.5 Оценка значимости коэффициентов в модели объекта исследования

Если все коэффициенты незначимы, это означает, что:

1. Достигнута область оптимума и следует перейти к полиному 2-го порядка;

2. Интервал варьирования слишком мал;

3. Отклик не зависит от факторов.

Определение границ доверительного интервала для коэффициентов:

1. Определяем дисперсию воспроизводимости при  $\alpha=0,95$ :

$$\Delta S_a^2 = \frac{\sum \Delta s_n^2}{N};$$

2. Определяем границу:

$$\Delta a_i = \frac{t \cdot \Delta S_a}{\sqrt{N}};$$

3. Проводим сравнение  $\Delta a_i$  и  $a_i$ , если  $\Delta a_i > a_i$ , то коэффициент можно считать незначимым и его из уравнения следует исключить. Линейные коэффициенты не следует отбрасывать.

*Задача:* необходимо сравнить 2 способа формования гранул. Критерий оценки будет прочность, которая определяется величиной напряжения при разрушении.

Гипотеза 1: оба способа равнозначны.

Гипотеза 2: один из способов дает гранулы более высокой прочности.

$p \cdot 10^4$ , Н/м<sup>2</sup>

N	p <sub>i</sub>	p <sub>i</sub> - $\bar{p}$	(p <sub>i</sub> - $\bar{p}$ ) <sup>2</sup>	p <sub>i</sub>	p <sub>i</sub> - $\bar{p}$	(p <sub>i</sub> - $\bar{p}$ ) <sup>2</sup>
1	2,40	-0,174	0,0303	2,64	0,015	0,0002
2	2,24	-0,334	0,1116	2,36	-0,265	0,0702
3	2,56	-0,014	0,0002	2,32	-0,305	0,0930
4	2,70	0,126	0,0159	2,57	-0,055	0,0030
5	2,65	0,076	0,0058	2,70	0,075	0,0056
6	2,82	0,246	0,0605	2,81	0,185	0,0342
7	2,49	-0,084	0,0071	2,77	0,145	0,0210
8	2,21	-0,364	0,1325	2,65	0,025	0,0006
9	2,83	0,256	0,0655	2,88	0,255	0,0650
10	2,84	0,266	0,0708	2,55	-0,075	0,0056
Ср.зн-е	2,574			2,63		
Сумма			0,5002			0,2984

1. Определение средних значений  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ :

$$2. \Delta S_n^2 = \frac{\sum(p_i - \bar{p})^2}{n-1}; \quad \Delta S_1^2 = \frac{0,5002}{10-1} = 0,056; \quad \Delta S_2^2 = \frac{0,2984}{10-1} = 0,033;$$

$$3. \Delta S_{\Sigma}^2 = \frac{[\Delta S_1^2(n_1-1) + \Delta S_2^2(n_2-1)]}{n_1+n_2-1}, \quad \Delta S_{\Sigma}^2 = \frac{[0,056(10-1) + 0,033(10-1)]}{10+10-1} = 0,042; \quad \Delta S_{\Sigma} = 0,205;$$

$$4. t_{\Sigma} = \frac{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|}{\Delta S_{\Sigma}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}, \quad t_{\Sigma} = \frac{|2,577 - 2,625|}{0,205} \sqrt{\frac{10 \cdot 10}{10+10}} = 0,56;$$

$$t_{\text{табл}} = 2,26; \quad t_{\Sigma} < t_{\text{табл}}$$

Подтверждается нулевая гипотеза, следовательно, расхождение незначимо, оба способа формирования гранул равнозначны.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Какие виды погрешностей измерений существуют?
2. Какие виды погрешностей измерений необходимо оценивать?

3. В чем различие между *истинной* абсолютной погрешностью единичного измерения и *измеряемой* абсолютной погрешностью единичного измерения? При каких условиях они равны?
4. Как рассчитывается дисперсия выборки?
5. Как соотносятся дисперсии серии измерений и отдельных измерений?
6. Что означает доверительный интервал? От каких параметров он зависит?
7. В чем заключается нулевая гипотеза?
8. С помощью каких критериев проверяется гипотеза о предполагаемом законе распределения?
9. Какие гипотезы проверяются с помощью критериев значимости? Приведите примеры критериев.
10. Какой критерий можно использовать при проверке грубой ошибки?

## 2 РЕГРЕССИОННЫЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗЫ

### 2.1 Регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате эксперимента был получен ряд измерений величины  $y: y_1, y_2, \dots, y_n$ , соответствующих значениям аргументов  $x: x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые могут быть представлены графически (рис. 2.1). Необходимо установить истинную эмпирическую зависимость между параметрами  $x$  и  $y$ .

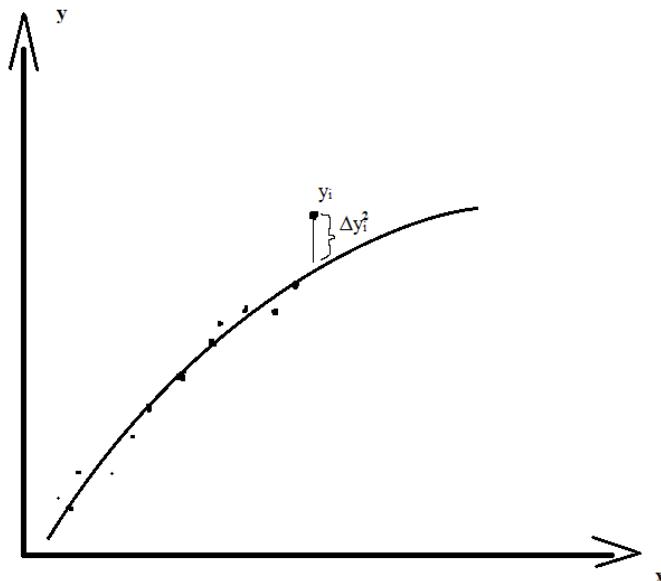


Рис. 2.1. Положение экспериментальных значений  $x$  и  $y$  и зависимость  $y=f(x)$

Последовательное соединение точек и получение ломаной линии не отражает истинную зависимость  $y=f(x)$ . Это следует уже из того, что форма ломаной не будет воспроизведиться. Измеренные значения  $y_i$  будут в общем случае смещены относительно искомой кривой  $y=f(x)$  как в сторону больших, так и в сторону меньших значений, вследствие статистического разброса (рис. 2.1). Необходимо провести такую кривую, которая бы максимально приближалась к истинной зависимости  $y=f(x)$ .

С точки зрения теории вероятности наилучшим приближением будет такая линия, для которой сумма квадратов расстояний по вертикали  $\Delta y_i$  от

точек  $y_i$  до заданной кривой будет минимальной. Этот метод называется *методом наименьших квадратов*.

Сущность метода заключается в следующем.

Предположим, что искомая зависимость имеет вид:

$$y=f(x, A_1, A_2, \dots, A_m), \quad (2.1)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – параметры.

Значения этих параметров определяются так, чтобы точки  $y_i$  располагались по обе стороны кривой  $y=f(x)$ , т.е. чтобы сумма квадратов отклонений измеряемых значений  $y_i$  от функции  $y=f(x)$  была наименьшей. Это соответствует предположению, что разброс точек  $y_i$  относительно кривой  $y=f(x)$  подчиняется закону нормального распределения. Мерой этого разброса является дисперсия  $\sigma^2$  или ее приближенное значение среднеквадратичная погрешность (1.8):

$$\Delta S_n^2 * = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 \equiv \min. \quad (2.2)$$

Требование минимального разброса соответствует требованию минимального значения этого среднего квадрата.

Известно, что функция  $f(A)$  имеет минимальное значение, если ее первая производная равна нулю  $\frac{df}{dA} = 0$ , а вторая положительна  $\frac{d^2f}{dA^2} > 0$ .

В случае, когда имеется несколько переменных, переходим к частным производным и к ним применяем вышеперечисленные условия:

$$\frac{\partial \Delta S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum [y_i - f(x_i)] \frac{\partial f(x_i)}{\partial A_i} \quad (2.3)$$

( $i=1, 2, \dots, m$ ;  $m < n$ ).

Обычно конкретный вид функции (уравнение регрессии) имеет вид полинома:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m \quad (2.4)$$

или системы независимых функций  $\varphi$ :

$$y = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_m \varphi_m(x). \quad (2.5)$$

## 2.2 Корреляционный анализ. Коэффициент корреляции

Изменение какой-либо случайной величины  $y$  от  $x$  имеет две составляющие:

- *стохастическая*, которая связана функциональной связью между ними  $y=f(x)$ ;

- *случайная*, которая связана с влиянием собственных случайных факторов.

Выявление стохастической связи, т.е. функциональной зависимости и оценка ее силы осуществляется с помощью коэффициента корреляции  $R$ :

$$R = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)\Delta S_y \Delta S_x}, \quad (2.6)$$

где  $\Delta S_y$ ,  $\Delta S_x$  – выборочные дисперсии (см. уравнение 1.11):

$$\Delta S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}; \quad \Delta S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}. \quad (2.7)$$

Коэффициент корреляции R имеет смысл, если между параметрами линейная связь и распределение нормальное.

Коэффициента корреляции занимает промежуточное значение между значениями  $-1$  и  $+1$ . При приближении R к единице, корреляция вполне вероятна, тогда как при приближении R к нулю она маловероятна. Причем, если при увеличении  $x$  увеличивается  $y$ , то коэффициент корреляции становится положительным, а если при увеличении  $x$  уменьшается  $y$ , то коэффициент корреляции становится отрицательным.

Поскольку R представляет собой статистическую величину, вычисленную на основании опытных данных, то необходимо проверить значимость коэффициента корреляции. Оценку значимости коэффициента парной корреляции выполняют по формуле (1.24) с использованием статистики t, имеющей распределение Стьюдента. Для этого выбирают уровень значимости и определяют число степеней свободы. Поскольку для вычисления R используются два расчетных средних значения  $x$  и  $y$ , то число степеней свободы составит  $f = n-2$ . По табл. 1 приложения определяют  $t_{\text{табл.}}$  и сравнивают с рассчитанным по формуле (1.24). При условии  $t >= t_{\text{табл.}}$  принимается решение о наличии значимости коэффициента корреляции.

Для проверки значимости уравнения регрессии, т.е. адекватности уравнения экспериментальным данным используют критерий Фишера F. Для этого рассчитывают выборочную дисперсию  $\Delta S_y^2$  по уравнению (2.7) и остаточную дисперсию:

$$\Delta S_{ocm}^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum (y_i - \bar{y}_i)^2.$$

Затем рассчитывают критерий Фишера  $F = \frac{\Delta S_y^2}{\Delta S_{ocm}^2}$ . Табличное значение

критерия Фишера  $F_{\text{табл.}}$  определяют при  $f = n-2$ . Если выполняется условие  $F > F_{\text{табл.}}$ , то уравнение статистически значимо, т.е. адекватно описывает экспериментальные данные.

#### **Вопросы для самопроверки:**

1. Какое условие должно выполняться при определении линии регрессии?
2. Как оценивается сила функциональной связи между параметрами?
3. Как рассчитывается коэффициент парной корреляции?
4. Какие значения может принимать коэффициента корреляции?
5. Как осуществляется оценка значимости коэффициента парной корреляции?
6. Как проводится проверка значимости уравнения регрессии?

## 3 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 3.1 Общие понятия

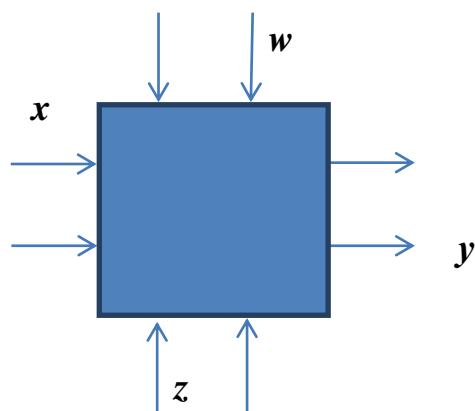
Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опыта, достаточных для решения поставленных задач с заданной точностью.

Оно позволяет минимизировать затраты труда на эксперимент.

Задачи, для которых необходимо планирование эксперимента:

- 1) создание математической модели исследования;
- 2) поиск оптимальных условий;
- 3) минимизация числа опытов при испытании образцов техники;
- 4) отсеивающие эксперименты для выявления параметров, незначительно влияющих на объект.

Поскольку на первом этапе отсутствует информация об объекте исследования, то мы его представим в виде «черного ящика».



Р и с. 3.1. Схема объекта исследования

Входящие параметры называют *факторами*. Различают факторы:

$x$  – контролируемые и регулируемые;

$z$  – контролируемые, но не регулируемые;

$w$  – неконтролируемые и нерегулируемые.

Выходящие параметры  $y$  получили название *отклик*. Совокупность значений отклика образует область планирования. А графическое значение этой области называется поверхностью отклика. Пространство, в котором строится поверхность отклика, называется факторным пространством. Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметра оптимизации. Размерность факторного пространства зависит от числа факторов. При многофакторном эксперименте поверхность отклика уже нельзя изобразить наглядно графически и приходится ограничиваться только аналитическим языком. Таким образом, план эксперимента – это часть факторного пространства (все возможные значения факторов), т.е. область задаваемых значений факторов.

Для факторов существуют области определения. Это значит, что у каждого фактора есть минимальное и максимальное возможные значения (уровни), между которыми он может изменяться либо непрерывно, либо дискретно. То есть для каждого фактора необходимо выбрать два уровня, на которых он будет варьироваться в эксперименте. Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному (нулевому) уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни фактора. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным и верхним (или нижним) уровнем. Таким образом, задача выбора уровней сводится к более простой задаче выбора интервала варьирования.

При планировании эксперимента натуральные значения факторов кодируются выбором масштабов по осям в единицах интервалов варьирования. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать с помощью преобразования:

$$X = \frac{C_i - C_{i0}}{\Delta C} = \pm 1.$$

где  $X$  – кодированное значение фактора;

$C_i$  – натуральное значение фактора;

$C_{i0}$  – натуральное значение фактора основного уровня;

$\Delta C$  – интервал варьирования.

Для факторов, имеющих два уровня, верхний уровень обозначается +1, нижний –1, а основной – 0. Условия проведения опытов (точки эксперимента) для двухфакторного и двухуровневого эксперимента типа  $N=2^2$  представлены на рис. 3.2 в виде вершин квадрата.

1. *Выбор нулевой точки.* Чем ближе выбранная нулевая точка к точке оптимума, тем меньшее число опытов потребуется. Чтобы выбрать нулевую точку, необходима априорная информация на основе литературы или аналогичных явлениях. Если есть предварительный опыт исследования объекта, то за нулевой уровень можно принять значения факторов, при которых получались наилучшие значения параметров оптимизации.

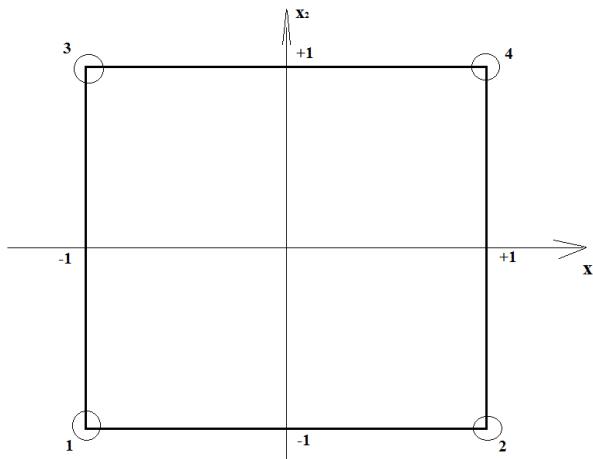
### 2. Выбор интервала варьирования

Верхний уровень ограничен областью планирования эксперимента. Значение фактора должно попасть внутрь области планирования.

Нижний уровень ограничен величиной ошибки фиксирования значения факторов. Обычно интервал варьирования должен быть больше  $2\Delta S_n^2$ .

### 3. Выбор числа уровней.

Минимальное число уровней составляет 2. Максимальное число уровней ограничено возможностями эксперимента и экспериментатора. Чаще всего используется двухуровневый эксперимент. В этом случае вводится кодированное значение факторов +1, –1.



Р и с. 3.2. План эксперимента первого порядка

4. Выбор схемы планирования эксперимента зависит от объекта исследования и степени его изученности. Если нет модели объекта исследования, в этом случае следует начинать с простейшей линейной модели  $N=2^2$  и затем ее усложнять, при этом следует отсеивать незначимые факторы. Если имеется модель, необходимо найти коэффициенты в уравнении.

##### 5. Выбор числа факторов.

Минимальное число факторов  $k=1$ , в этом случае имеет место одноФакторный эксперимент.

Максимальное число факторов  $k$  обусловлено экономическими соображениями и опытом исследователя.

Число степеней свободы:  $f=N-\xi$ , где  $N$  – общее число опытов;  $\xi$  – число независимых констант.

*Ненасыщенный план*  $f > 0$ ;

*насыщенный план*  $f = 0$ ;

*сверхнасыщенный план*  $f < 0$ .

Сверхнасыщенный план обладает избыточной информацией. Его следует исключать и переходить к насыщенному.

*Рандомизация* – это процедура, обеспечивающая случайный порядок проведения опытов с помощью случайных чисел(random - случайный (англ.). Она позволяет исключить систематические ошибки или их уменьшить за счет неконтролируемых факторов. Например: проводится измерение концентрации вещества с помощью калориметра. Результат измерения зависит от оптических свойств среды и будет различен утром, вечером и днем. Чтобы исключить систематические ошибки за счет этого, опыты рекомендуется проводить в случайном порядке. Случайный порядок обеспечивается с помощью таблицы случайных чисел (приложение 2).

*Свойства полного факторного эксперимента* (критерии оценки плана)

1. Симметричность относительно центра плана, т.е. алгебраическая сумма вектора столбца каждого фактора равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 0;$$

где  $i$  – номер фактора;  $j$  – номер уровня.

2. *Нормируемость* – сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов:  $\sum_{j=1}^N x_{ij}^2 = N$ .

3. *Ортогональность* – сумма почленных произведений любых двух векторов столбцов равна нулю:

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} x_{uj} = 0,$$

где  $i, u$  – столбцы матрицы;

$j$  – число опытов.

4. *Ротатабельность* – точки в матрице планирования подбираются так, что обеспечивается равенство дисперсий на равном расстоянии от нулевой точки.

### 3.2 Полный факторный эксперимент

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Количество опытов  $N$  при ПФЭ определяется по формуле:

$$N = L^k ,$$

где  $L$  – число уровней;

$k$  – количество факторов.

План эксперимента обычно представляют в виде матрицы. Для  $k$  факторов и  $L$  уровней матрица имеет вид:

$$\left( \begin{array}{c} X_{11} X_{21} \dots X_{k1} \\ X_{12} X_{22} \dots X_{k2} \\ \dots \dots \dots \\ X_{1L} X_{2L} \dots X_{kL} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_L \end{array} \right)$$

Р и с. 3.3. Матрица планирования эксперимента

Строки в этой матрице означают уровни, столбцы – факторы. Матрица заполняется натуральными или кодированными значениями факторов.

*Пример матрицы  $N=2^2$ .*

Для двухфакторного и двухуровневого эксперимента типа  $N=2^2$  ожидается 4 опыта.

Таблица 3.1 – Расширенная матрица планирования полного факторного эксперимента  $2^2$

№ опыта	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$y$
---------	-------	-------	----------	-----

1	+	+	+	$Y_1$
2	-	+	-	$Y_2$
3	+	-	-	$Y_3$
4	-	-	+	$Y_4$

Порядок чередования значений факторов может быть через 2, через 4 и т.д. Далее необходимо провести опыты с учетом заданных значений факторов и получить результат по откликам:  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ .

### *Математические модели объекта исследования*

Математические модели объекта исследования предстают в виде уравнений (полиномов 1, 2, 3 степени).

Полином первой степени:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^k a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j. \quad (3.1)$$

Полином второй степени:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^k a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^k a_{ii} \cdot x_i^2. \quad (3.2)$$

На начальном этапе исследования используют линейные модели:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} y = & a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \\ & + a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $a_0$  – свободный член;

$a_1, a_2, a_3$  – линейные коэффициенты;

$a_{1i}$  – коэффициенты двойного взаимодействия;

$a_{123}$  – коэффициент тройного взаимодействия.

Уравнение математической модели для двухфакторного эксперимента с учетом парных взаимодействий имеет вид (3.3).

Значения коэффициентов регрессии в уравнении (3.1) могут быть расчитаны по формулам:

$$a_i = \sum_{n=1}^N x_{in} \cdot \bar{y}_n , \quad (3.5)$$

$$a_{ij} = \frac{\sum_{a=1}^N x_{ij} \cdot \bar{y}_n}{N} , \quad (3.6)$$

где  $x_{ij}$  – значение переменной в соответствующем столбце плана эксперимента ( $\pm 1$ );

$y_n$  – средний результат  $n$ -ого опыта;

$N$  – общее число опытов;

$n$  – номер варианта опыта;

$i$  – номер фактора;

$j$  – номер фактора, отличный от  $i$ .

Для линейной модели (3.3) коэффициенты рассчитываются по уравнениям:

$$a_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} ; \quad (3.7)$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4} ; \quad (3.8)$$

$$a_2 = \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4} ; \quad (3.9)$$

$$a_{12} = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4} . \quad (3.10)$$

Как следует из уравнения (3.7),  $a_0$  есть среднее арифметическое значений отклика. Чтобы его получить, необходимо сложить все  $y$  и разделить на число опытов. Чтобы привести, эту процедуру в соответствие с формулой для вычисления коэффициентов, в матрицу планирования удобновести вектор-столбец переменной  $x_0$ , которая принимает во всех опытах значение  $+1$ . Матрица планирования в этом случае будет иметь вид:

Таблица 3.2 – Расширенная матрица планирования полного факторного эксперимента  $2^2$

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$
+	+	+	+

+	-	+	-
+	+	-	-
+	-	-	+

Задача состоит в том, чтобы найти по результатам эксперимента значения неизвестных коэффициентов модели. Благодаря кодированию факторов расчет коэффициентов упрощается.

Полный факторный эксперимент весьма затратен и трудоемок, так как для него характерно большое число опытов. В результате отсеивания части ПФЭ получают дробный факторный эксперимент. Его матрицу называют дробной репликой. При значительном числе опытов (более 10) для упрощения задачи можно минимизировать число уровней до 2.

### 3.3 Способы отсеивания части полного факторного эксперимента (ПФЭ)

Если количество опытов в ПФЭ превосходит число коэффициентов (линейных) в модели, то ПФЭ является сверхнасыщенным. В этом случае применяется частичный факторный эксперимент (ЧФЭ).

Способы отсеивания ПФЭ.

1. *Рандомизированный план* строится на случайном сочетании уровней для каждого прогона (столбца) с помощью таблиц случайных чисел. Количество необходимых опытов вытекает из целесообразности.

2. «*Латинский квадрат*» используется с одним первичным и несколькими вторичными факторами. Например, А – первичный фактор, В и С – вторичные.

$L=4$  – количество уровней,  $K=3$  – количество факторов. Общее число опытов в ПФЭ должно быть  $N=4^3=64$ .

Представим матрицу относительно уровней А так, чтобы данный уровень фактора А встречался один раз в столбце и строке.

B/C	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>
B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
B <sub>2</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>1</sub>
B <sub>3</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>
B <sub>4</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>

Число опытов сократится и составит  $N=4 \times 4 = 16$ .

3. *Эксперимент с изменением факторов по одному.*

Один из факторов «пробегает» все уровни, а остальные остаются постоянными. Матрица планирования будет иметь вид:

A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
B <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>
C <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

Число опытов составит  $N=4 \times 3 = 12$ .

#### 4. Дробный факторный эксперимент (ДФЭ).

Рассмотрим матрицу планирования  $2^2$ :

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>
1	+	+	+
2	-	+	-
3	+	-	-
4	-	-	+

Уравнение линейной модели:  $y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_{12}x_1x_2$ .

ПФЭ обладает избыточностью, так как число опытов  $N=4$  больше  $2 -$  числа линейных коэффициентов в уравнении.

Если есть уверенность, что процесс описывается линейной моделью, то достаточно знать коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ .

Пренебрегая парным взаимодействием, употребим столбец  $x_1x_2$  для фактора  $x_3$ . Таким образом, чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащей парному взаимодействию  $x_1x_2$ , которым можно пренебречь. Будем иметь план  $2^3=8$ , это полная реплика.

Если поставим 4 опыта, то это будет полуrepidика.

Если число опытов  $N=4^2=16$ , то это полная реплика, если  $N=8$  – полуrepidика,  $N=4$  – четверть реплики.

### 3.4 Планирование эксперимента 2-го порядка

Планы 1-го порядка применяются для описания линейных процессов, а также для предварительного изучения объекта исследования.

План 1-го порядка для двухфакторной зависимости  $N=2^2$  может быть представлен в виде квадрата, вершины которого соответствуют опытам (рисунок 3.2). Если эксперимент трехфакторный  $N=2^3$ , то моделью эксперимента является куб, вершины которого соответствуют опытам.

Модель объекта исследования описывается в этом случае описывается уравнением регрессии 1-го порядка (3.1).

Планы 2-го порядка необходимы, если: зависимость между параметрами не линейна; если каждый фактор варьируется более чем на 2-х уровнях.

Составление матрицы планирования в этом случае начинается также, как и для плана 1-го порядка. Затем вводятся «звездные» точки  $x_i=\pm a$  и *центр плана*. Матрица планирования имеет вид:

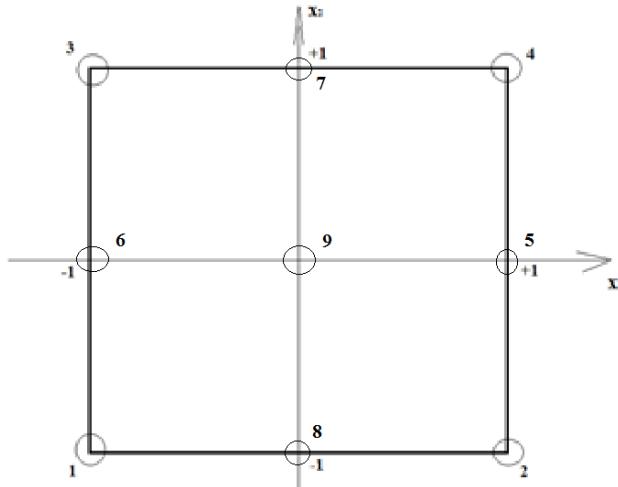
Таблица 3.3 – Расширенная матрица планирования для плана 2-го порядка

Опыты	Факторы (кодированные значения)							
	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	$x_1^2$	$x_2^2$		
ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_1$
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	$Y_2$
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	$Y_3$

	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_4$
«звездные» точки	5	+1	$\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_5$
	6	+1	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_6$
	7	+1	0	$\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_7$
	8	+1	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_8$
	Центр плана	9	+1	0	0	0	0	$y_9$

Опыты проводятся в первых 4 точках также, как и для плана 1-го порядка, затем в «звездных» точках (58) при  $x_i=\alpha$  и в центрах плана  $x_i=0$ .

План 2-го порядка для двухфакторной зависимости  $N=2^2$  может быть представлен в виде квадрата, в котором показаны точки соответствующие опытам (рис. 3.4).



Р и с. 3.4. План эксперимента второго порядка

Уравнение модели имеет вид:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2. \quad (3.11)$$

#### Вопросы для самопроверки:

1. В чем отличие пассивного и активного эксперимента?
2. Каковы этапы проведения эксперимента?
3. Понятие опыта.
4. Каковы задачи планирования эксперимента?
5. В чем суть планирования эксперимента?
6. Что собой представляет модель объекта исследования при планировании эксперимента?
7. Каковы требования предъявляются к факторам?
8. Как выбираются уровни плана, нулевая точка, интервалы варьирования?
9. Как осуществляется кодирование натуральных значений факторов?
10. Как строится матрица планирования?

## 4 АПРИОРНОЕ РАНЖИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ

На стадии предварительного изучения объекта исследования целесообразно проведение психологического эксперимента путем обработки дан-

ных, полученных в результате опроса экспертов (специалистов). Такой эксперимент позволяет правильно отобрать факторы и исключить незначимые.

Метод априорного ранжирования факторов заключается в том, что факторы располагаются (ранжируются) в порядке убывания вносимого ими вклада. Вклад каждого фактора оценивается по величине ранга (места), который ему отводится экспертом, с учетом предполагаемого влияния на параметры процесса.

Каждому эксперту предлагали заполнить анкету, в которой перечислены факторы, их размерность и предполагаемый интервал варьирования. Эксперт заполняет анкету, выставляя баллы каждому фактору и, таким образом, определяет место факторов в ранжированном ряду. Эксперт может добавить новые факторы или предложить изменить интервалы варьирования.

### *Обработка результатов экспертизы*

Введем обозначения:  $i$  – факторы,  $i=1, \dots, k$ ;  $j$  – эксперты,  $j=1, \dots, m$ .

1) Определяем сумму  $\sum$  рангов по каждому фактору:

$$[\sum_{j=1}^m a_{ij}], \quad (4.1)$$

где  $a_{ij}$  – ранг  $i$ -го фактора  $j$ -экспертом.

2) Разница между этой суммой и средней суммой рангов составит:

$$\sum_1^m a_{ij} - \frac{\sum_1^k \sum_1^m a_{ij}}{k} = \Delta a. \quad (4.2)$$

3) Определяем сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_1^m (\Delta a)^2. \quad (4.3)$$

4) Коэффициент конкордации составит:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3-k)-m \sum T_j}, \quad (4.4)$$

где  $\sum T_j$  определяется:

$$T_j = \sum (t_i^3 - t_j); \quad (4.5)$$

$t_j$  – число одинаковых рангов в  $j$ -ранжировании.

Коэффициент конкордации изменяется в пределах  $W=0 \div 1$ .

Использовать коэффициент  $W$  можно только после оценки его значимости. Для оценки значимости воспользуемся критерием Пирсона  $\chi^2$ :

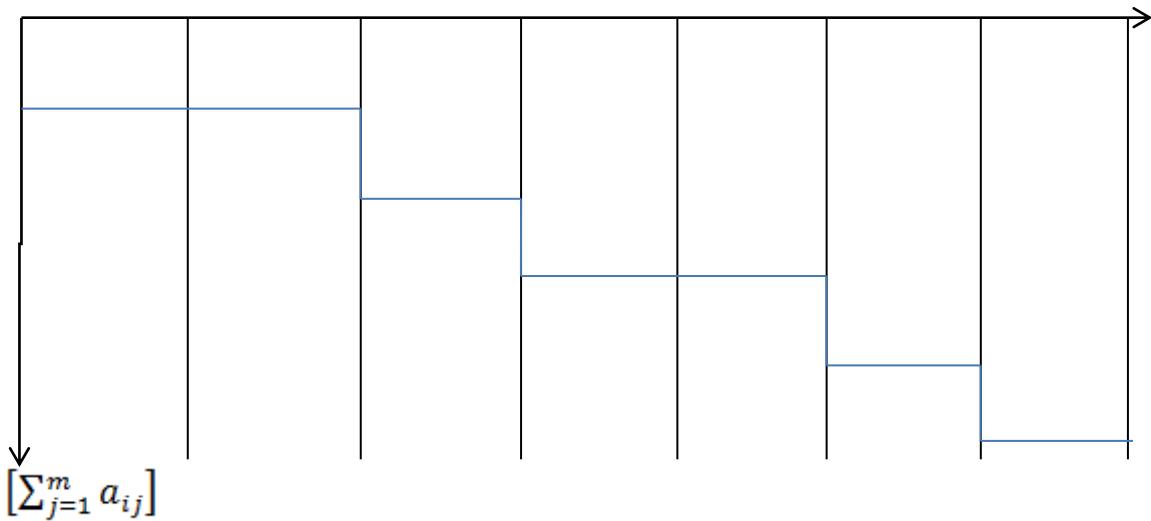
$$\chi^2 = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1} \sum_1^m T_j} \quad (4.6)$$

при  $f=k-1$ .

Если  $\chi^2_{\text{расч}} > \chi^2_{\text{табл}}$ , то согласованность во мнениях экспертов не случайна.

Построение средней диаграммы рангов заключается в том, что находим сумму рангов по каждому фактору  $[\sum_{j=1}^m a_{ij}]$  и наносим на диаграмму по оси ординат в порядке ее убывания. По оси абсцисс наносятся факторы. Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место на диаграмме. Напр., факторы убывают в порядке:  $x_1, x_7, x_6, x_4, x_2, x_3, x_5$  (рис. 4.1).

0       $x_1$        $x_7$        $x_6$        $x_4$        $x_2$        $x_3$        $x_5$       факторы



Р и с. 4.1. Средняя диаграмма рангов

Если распределение на диаграмме равномерное, то все факторы следует включить в эксперимент. Если распределение неравномерное, но падение медленное, тоже надо включать все факторы. Если падение быстрое, то возможно отсеивание факторов.

*Пример.* Оцениваем  $k=7$  факторов пятью  $m=5$  экспертами.

Матрица рангов

Число экспертов	Факторы $x_i$						
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
1	1	2	6	4	7	3	5
2	1	2	7	6	3	5	4
3	7	1	6	4	2	5	3
4	3	1	5	6	4	7	2
5	1	2	6	4	5	7	3
$\sum a_{ij}$	13	8	30	24	21	27	17
$\Delta a$	-7	-12	10	4	1	7	-3
$\Delta a^2$	49	144	100	16	1	49	9

Среднее значение:  $\bar{x} = \frac{\sum_1^k \sum a_{ij} - 140}{k} = 20$ .

Сумма квадратов отклонений:  $S = \sum (\Delta a_{ij})^2 = 368$  при  $T_j = 0$ ;  $\sum T_j = 0$ .

Коэффициент конкордации составит:  $W = \frac{12 \cdot 368}{5^2 (7^2 - 7)} = 0,526$ .

Для оценки значимости воспользуемся критерием Пирсона  $\chi^2$ :

$$\chi^2_{\text{расч}} = \frac{12 \cdot 368}{5 \cdot 7 (7+1)} = 15,771,$$

Число степеней свободы  $f = k-1 = 6$ , табличное значение  $\chi^2_{\text{табл}} = 12,6$ . Поскольку  $\chi^2_{\text{расч}} > \chi^2_{\text{табл}}$ , следовательно, оценка экспертов носит не случайный характер.

*Задание.* Оценка скорости теплопередачи в теплообменнике возможна по следующим параметрам.

1. Режим движения (скорость).

2. Вид теплообмена (нагрев, охлаждение, конденсация).
3. Вид теплоносителя (вода, воздух, пар).
4. Материал аппарата.
5. Геометрия аппарата (вертикальный, горизонтальный).
6. Конструкция теплопередающей поверхности (гофрированная, гладкая).
7. Накипь (имеется, отсутствует).

Необходимо провести экспертную оценку по семи факторам, т.е. провести ранжирование факторов и выявить наиболее значимые.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Каково назначение метода априорного ранжирования факторов?
2. В чем заключается метода априорного ранжирования факторов?
3. Как рассчитывается коэффициент конкордации?
4. Какой критерий используется для оценки значимости коэффициента конкордации?
5. Каково назначение средней диаграммы рангов и как она строится?

## **5 ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ (ПО)**

ПО – это признаки, по которым оптимизируется процесс. Область определения (ОО) параметров оптимизации – это множество значений, которые может принять ПО. Область определения может быть: непрерывной или дискретной; ограниченной или неограниченной.

Примеры: выход продукции – это непрерывная ограниченная область определения. Число бракованных изделий – это дискретная область определения.

Параметр оптимизации должен быть количественным. Если он носит качественный характер, то путем ранжирования ему можно присвоить численную оценку.

Требования к параметрам оптимизации.

Параметр оптимизации:

- должен быть количественным;
- должен быть однозначным и выражаться одним числом;
- должен быть универсальным;
- должен реально отражать функционирующую систему;
- должен иметь физический смысл и быть простым.

### *Задачи с несколькими выходными параметрами*

Часто требуется оптимизировать процесс с несколькими выходными параметрами: производительность, показатели качества (физико-химические, органолептические и микробиологические), экономические и др.

Обычно выбирается один, наиболее важный параметр, остальные имеют фиксированные значения. Чтобы снизить число параметров, используют корреляционный анализ и определяют коэффициент корреляции между  $y_1$  и  $y_2$  и.т.д. Если между  $y_1$   $y_2$  тесная линейная корреляционная связь ( $R^2$  стремится к 1), то один из параметров можно исключить.

### *Обобщенный критерий оптимизации*

Трудности обобщения связаны:

- 1) с наличием различных физических смыслов и размерностей частных параметров;
- 2) с ведением безразмерной шкалы для каждого отклика;
- 3) со сложностью комбинирования безразмерных частных откликов в обобщенный показатель.

### *Простейшие способы обобщения*

*Первый способ.* Исследуемый объект имеет  $n$ -частных откликов  $y_u$  ( $u=1,2,\dots,n$ ) и каждый из них измеряется в  $N$  опытах ( $i=1, 2,\dots,N$ ). Тогда обобщенный отклик  $y_{ui}$  – это значение  $u$ -отклика в  $i$ -опыте.

Введем простейшую шкалу для частных откликов: «0» – плохо, «1» – удовлетворительно.

Тогда обобщенный отклик будет иметь вид (5.1):

$$y = \sqrt[n]{\prod_1^n y_{ui}} \quad (5.1)$$

где  $\prod$  – произведение частных откликов.

*Вывод:* если хотя бы один из частных откликов будет равен нулю, то обобщенный отклик тоже будет равен нулю. Недостаток этого способа это неточность и грубость обобщения.

*Второй способ* обобщения применяется тогда, когда для частных откликов имеется идеал (образец) –  $y_{uo}$ . Тогда мерой близости к идеалу может быть разность ( $y_{ui} - y_{uo}$ ). Однако эта разность размерна, что является препятствием к обобщению. Чтобы исключить сложности к обобщению за счет размерности, введем безразмерную величину:

$$\frac{y_{ui} - y_{uo}}{y_{uo}} \quad (5.2)$$

Однако все отклики в этом случае входят в обобщенный на равных условиях, что не реализуется на практике. Этот недостаток устраняется с помощью коэффициента веса  $a_u$ . Тогда обобщенный отклик будет равен сумме:

$$y_i = \sum_1^N \left( \frac{y_{ui} - y_{uo}}{y_{uo}} \right)^2 a_u, \quad (5.3)$$

где сумма  $\sum a_u = 1$ .

Коэффициент веса  $a_u$  определяется методом ранжирования факторов.

### *Обобщенная функция Харрингтона*

#### *Шкала желательности*

В основе лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности (предпочтительности). Шкала желательности устанавливает связь и соответствие между *физическими и психологическими* параметрами. Физические параметры – это отклики, характеризующие объект исследования. Психологические параметры

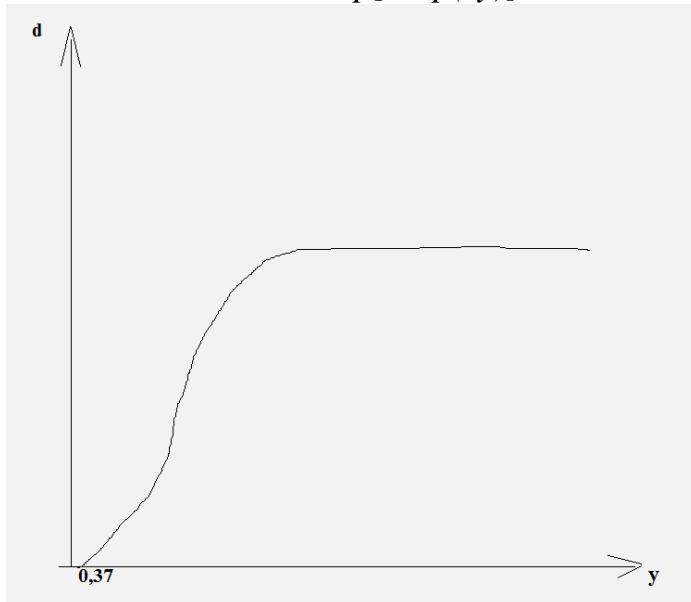
- это субъективные оценки экспертов того или иного параметра. Существуют готовые таблицы, которые характеризуют оценки (табл. 5.1).

Таблица 5.1 – Стандартная шкала желательности

Желательность	Очень хорошо	Хорошо	Удовлетворительно	Плохо	Очень плохо
Отметка по шкале	1,0–0,8	0,8–0,63	0,63–0,37	0,37–0,2	0,2–0

Функция желательности Харрингтона  $d$  имеет вид:

$$d = \exp[-\exp(-y)]. \quad (5.4)$$



Р и с. 5.1. Функция Харрингтона

На оси ординат нанесены значения  $d$ , а по оси абсцисс значения отклика  $y$ .

За начало отсчета по оси ординат может быть выбрано значение, соответствующее желательности 0,37 ( $y=0$ ;  $d=0,37$ ).

*Обобщенная функция желательности:*

$$D = \sqrt[n]{\prod_1^n d_u}, \quad (5.5)$$

где  $d_u$  – частные желательности.

Если хотя бы одна частная желательность  $d_u = 0$ , то обобщенный показатель также  $D=0$ .  $D=1$  имеет место только тогда, когда все  $d_u=1$ .

Таким образом, обобщенная функция желательности  $D$  весьма чувствительна к малым значениям частных желательностей  $d_u$ .

*Вопросы для самопроверки:*

1. Каковы требования к параметрам оптимизации?
2. В каких задачах используется обобщение и в чем заключается его сущность?
3. Обобщенная функция Харрингтона и в чем заключается ее преимущество?

4. Проведите сравнительную оценку различных способов обобщения.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Кузнецов И.Н. Научное исследование. – М.: Дашков и К, 2008.– 457 с.
2. Шкляр М.Ф. Основы научных исследований.– М.: Дашков и К, 2010.– 242 с.
3. Грачев Ю.П., Плаксин. Ю.М. Математические методы планирования эксперимента.– М.: ДeЛи принт, 2005.– 296 с.
4. Батрак А.П. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие.– Красноярск, 2010.– 60 с.
5. Методология планирования эксперимента: методические указания к лабораторным работам/ Сост. Т.П. Абомелик.– Ульяновск: УлГТУ, 2011.– 38 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

*Приложение 1*

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ СТЪЮДЕНТА ( $t$ -критерия)  
ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ( $\alpha$ )  
ДЛЯ РАЗЛИЧНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ ( $n$ )

$n$	$\alpha$								
	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	2,00	1,38	2,0	3,1	6,31	12,71	31,8	63,7	637
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
4	0,77	0,98	1,25	1,6	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,6
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,94	2,45	3,14	3,71	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,90	2,37	3,00	3,50	5,4
9	0,71	0,89	1,1	1,4	1,86	2,31	2,90	3,36	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,83	2,26	2,82	3,25	4,8
11	0,70	0,88	1,1	1,4	1,81	2,23	2,76	3,17	4,6
12	0,70	0,87	1,1	1,4	1,80	2,20	2,72	3,10	4,5
13	0,70	0,87	1,1	1,4	1,78	2,18	2,68	3,05	4,3
14	0,69	0,87	1,1	1,4	1,77	2,16	2,65	3,30	4,2
15	0,69	0,87	1,1	1,3	1,76	2,15	2,62	2,98	4,1
16	0,69	0,87	1,1	1,3	1,75	2,13	2,60	2,95	4,0
17	0,69	0,86	1,1	1,3	1,75	2,12	2,58	2,92	4,0
18	0,69	0,86	1,1	1,3	1,74	2,11	2,56	2,90	4,0
19	0,69	0,86	1,1	1,3	1,73	2,10	2,55	2,88	3,9
20	0,69	0,86	1,1	1,3	1,73	2,09	2,54	2,85	3,9
30	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
$\infty$	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

*Приложение 2*

### ФРАГМЕНТ ТАБЛИЦЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

56 66 25 32 38 64 70 26 27 67 77 40 04 34 63 98 99 89 31 16 12 90 50 28 96  
 88 40 52 02 29 82 69 34 50 21 74 00 91 27 52 98 72 03 45 65 30 89 71 45 91  
 87 63 88 23 62 51 07 69 59 02 89 49 14 98 53 41 92 36 07 76 85 37 84 37 47  
 32 25 21 15 08 82 34 57 57 35 22 03 33 48 84 37 37 29 38 37 89 76 25 09 69  
 44 61 88 23 13 01 59 47 64 04 99 59 96 20 30 87 31 33 69 45 58 48 00 83 48  
 94 44 08 67 79 41 61 41 15 60 11 88 83 24 82 24 07 78 61 89 42 58 88 22 16  
 13 24 40 09 00 65 46 38 61 12 90 62 41 11 59 85 18 42 61 29 88 76 04 21 80  
 78 27 84 05 99 85 75 67 80 05 57 05 71 70 31 31 99 99 06 96 53 99 25 13 63  
 42 39 30 02 34 99 46 68 45 15 19 74 15 50 17 44 80 13 86 38 40 45 82 13 44  
 04 52 43 96 38 13 83 80 72 34 20 84 56 19 49 59 14 85 42 99 71 16 34 33 79  
 82 85 77 30 16 69 32 46 46 30 84 20 68 72 98 94 62 63 59 44 00 89 06 15 87  
 38 48 84 88 24 55 46 48 60 06 90 08 83 83 98 40 90 88 25 26 85 74 55 80 85  
 91 19 05 68 22 58 04 63 21 16 23 38 25 43 32 98 94 65 35 35 16 91 07 12 43  
 54 81 87 21 31 40 46 17 62 63 99 71 14 12 64 51 68 50 60 78 22 69 51 98 37  
 65 43 75 12 91 20 36 25 57 92 33 65 95 48 75 00 06 65 25 90 16 29 34 14 43  
 49 98 71 31 80 59 57 32 43 07 85 06 64 75 27 29 17 06 11 30 68 70 97 87 21  
 03 98 68 89 39 71 87 32 14 99 42 10 25 37 30 08 27 75 43 97 54 20 69 93 50  
 56 04 21 34 92 89 81 52 15 12 84 11 12 66 87 48 21 06 86 08 35 39 52 28 09  
 48 09 36 95 36 20 82 53 32 89 92 68 50 88 17 37 92 02 23 43 63 24 69 80 91  
 23 97 10 96 57 74 07 95 26 44 93 08 43 30 41 86 45 74 33 78 84 33 38 76 73  
 43 97 55 45 98 35 69 45 96 80 46 36 39 96 33 60 20 73 30 79 17 19 03 47 28  
 40 05 08 50 79 89 58 19 86 48 27 98 99 24 08 94 19 15 81 29 82 14 35 88 03  
 66 97 10 69 02 25 36 43 71 76 00 67 56 12 69 07 89 55 63 31 50 72 20 33 36  
 15 62 38 72 92 03 76 09 30 75 77 80 04 24 54 67 60 10 79 26 21 60 03 48 14  
 77 81 15 14 67 55 24 22 20 55 36 93 67 69 37 72 22 43 46 32 56 15 75 25 12  
 18 87 05 09 96 45 14 72 41 46 12 67 46 72 02 59 06 17 49 12 73 28 23 52 48  
 08 58 53 63 66 13 07 04 48 71 39 07 46 96 40 20 86 79 11 81 74 11 15 23 17  
 16 07 79 57 61 42 19 68 15 12 60 21 59 12 07 04 99 88 22 39 75 16 69 13 84

*Приложение 3*

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ФИШЕРА (F-критерия)  
ПРИ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ 0,95

Число степеней свободы для меньшей дисперсии	Число степеней свободы дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	$\infty$
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	19,51	19,0	19,6	19,24	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,28
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,43	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,16	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
100	3,94	3,09	2,60	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
$\infty$	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

*Приложение 4*

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КОХРАНА

Число дисперсий (N)	Число степеней свободы ( $f_1$ )						
	4	5	6	8	10	36	$\infty$
4	0,640	0,600	—	—	0,495	—	0,250
5	0,544	0,507	0,478	0,439	0,412	0,307	0,200
8	0,396	0,360	0,336	0,304	0,283	0,202	0,125
15	0,242	0,220	0,203	0,182	0,167	0,114	0,067
20	0,192	0,174	0,160	0,142	0,130	0,088	0,050
120	0,042	0,037	0,034	0,029	0,027	0,017	0,008

*Приложение 5*

ЗНАЧЕНИЯ Х<sup>2</sup>-КРИТЕРИЯ ДЛЯ УРОВНЯ ЗНАЧИМОСТИ 0,04

Число степеней свободы	1	2	3	4	5	6	7	8
x <sup>2</sup>	3,841	5,991	7,815	9,488	11,070	12,592	14,067	15,507
Число степеней свободы	9	10	11	12	13	14	15	16
x <sup>2</sup>	16,919	18,307	19,675	21,026	22,362	23,685	24,996	26,296
Число степеней свободы	17	18	19	20	21	22	23	24
x <sup>2</sup>	27,587	28,869	30,144	31,410	32,672	33,924	35,172	36,415
Число степеней свободы	25	26	27	28	29	30		
x <sup>2</sup>	37,652	38,885	40,113	41,437	42,557	43,773		

*Приложение 6*

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ  $\alpha=0,05$

Число степеней свободы f	Критическое значение g	Число степеней свободы f	Критическое значение g	Число степеней свободы f	Критическое значение g
1	0,997	9	0,602	17	0,456
2	0,950	10	0,576	18	0,444
3	0,878	11	0,553	19	0,433
4	0,811	12	0,532	20	0,423
5	0,754	13	0,514	30	0,349
6	0,707	14	0,497	50	0,273
7	0,666	15	0,482	80	0,217
8	0,632	16	0,468	100	0,195

## Содержание

1 Дисперсионный анализ .....	1
1.1 Точность и погрешности приборов и измерений .....	1
1.2 Статистические гипотезы .....	11
2 Регрессионный и корреляционный анализ.....	18
2.1 Регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов.....	18
2.2 Корреляционный анализ. Коэффициент корреляции .....	19
3 Планирование эксперимента .....	21
3.1 Общие понятия.....	21
3.2 Полный факторный эксперимент.....	24
3.3 Способы отсеивания части полного факторного эксперимента (ПФЭ) .....	27
3.4 Планирование эксперимента 2-го порядка .....	28
4 Априорное ранжирование факторов.....	29
5 Параметры оптимизации (ПО) .....	32
Список литературных источников .....	36
Приложения .....	37

---

---

*Ответственный за выпуск А.И. Гнездилова  
Корректор Г.Н. Елисеева*

Заказ № 326 –Р. Тираж 50 экз. Подписано в печать 25.09.2021 г.  
ВГМХА 160555, г. Вологда, с. Молочное, ул. Емельянова, 1